Esercitazione di Metodi Matematici della Fisica
Lunedi 25 Ottobre 2004

ACHTUNG: Questi appunti sono pieni di errori... Okkio...

Preliminari: logaritmi e potenze in campo complesso.

$$\log(i) = \log e^{\frac{1}{2}\pi i} = \frac{1}{2}\pi i$$

$$\log(-i) = \log e^{\frac{3}{2}\pi i} = \frac{3}{2}\pi i$$

$$\log(-1) = \log e^{(\pi i)} = \pi i$$

$$log(z_1 \cdot z_2) = log(\rho_1 e^{i\theta_1} \cdot \rho_2 e^{i\theta_2}) = log(\rho_1\rho_2) + i(\theta_1 + \theta_2) + 2\pi ik$$

$$z^w = e^{w \log z}$$

$$i^i = e^{i \log i} = e^{-\pi/2}$$

$$-1^i = e^{i \log(-1)} = e^{-\pi}$$

Esercizio 1

Verificare se la funzione $f(z) = z^2$ e' armonica.

Affinche una funzione $f(z) = u + iv$ sia armonica, deve essere $u_x = v_y$ e $u_y = -v_x$.

Verifichiamo...

$$z = x + iy$$

$$f(z) = x^2 - y^2 + i(2xy) = u(x, y) + iv(x, y)$$

Quindi:

$$\begin{aligned} u_x &= 2x; \quad u_y = -2y; \\ v_y &= 2x; \quad v_x = -2y; \end{aligned}$$

Quindi la funzione $f(z) = z^2$ e' effettivamente armonica.

Esercizio 2

Verificare che la funzione $f(z) = z^*$ non e' armonica.

$$f(z) = x - iy$$

$$\begin{aligned} u_x &= 1; \quad u_y = 0; \\ v_y &= -1; \quad v_x = 0; \end{aligned}$$

Questa funzione non e' armonica. Questo risultato vale in generale per tutte le funzioni in campo complesso dipendenti solo da z o da z^*.

Esercizio 3

Disegnare nel piano complesso il dominio definito da $|z - i + 5| = 3$

$$|x + iy - i + 5| = 3$$
$$|(x + 5) + i(y - 1)| = 3$$
$$(x + 5)^2 + (y - 1)^2 = 9$$

E' una circonferenza di centro (-5+i) e raggio 3.

Esercizio 4

Disegnare nel piano complesso il dominio definito da $|3z + i| \geq 3$

$$|3x + 3iy + i| \geq 1$$
$$9x^2 + (3y + 1)^2 \geq 1$$

Il centro e' in $-i/3$ e il raggio $R = 1/3$

Esercizio 5

Discutere la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n n!}{n^n}$$

Ricordiamo il criterio del rapporto $R = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ e la formula di Stirling per l'approssimazione del fattoriale $n! \approx n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$

$$R^{-1} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a^n n!(n+1)^{n+1}}{a^{n+1}(n+1)!n^n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a^n n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}(n+1)^{n+1}}{a^{n+1}n^{n+1}e^{-n-1}\sqrt{2\pi(n+1)}}\right| = \left|\frac{a}{e}\right|$$

La serie converge per $|a| < |e|$.

Esercizio 6

Calcolare il raggio di convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{(n!)^a}$$

con a numero reale positivo.

Utilizzando il criterio del rapporto si ha

$$R^{-1} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1!)^a}{(n!)^a}\right| = \infty$$

Esercizio 7

Discutere la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} c^{n^2} z^n$$

con c numero complesso. Utilizzando il criterio di Cauchy-Hadamart si ottiene

$$R = \lim_{n\to\infty} |a_n|^{-\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} |c^{n^2}|^{-\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} |c|^{-n}$$

per $|c| < 1 \rightarrow R = \infty$; per $|c| > 1 \rightarrow R = 0$; per $|c| = 1 \rightarrow R = 1$.

Esercizio 8

Calcolare il raggio di convergenza della serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt{n}} z^n$$

$$R = \lim_{n\to\infty} |e^{-\sqrt{n}}|^{-\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} |e^{-\frac{\sqrt{n}}{n}}| = \lim_{n\to\infty} |e^{-\frac{1}{\sqrt{n}}}| = 1$$

Esercizio 9

Calcolare lo sviluppo di Taylor intorno al punto $z = 0$ della funzione

$$\frac{1}{x^2+1}$$

Ricordiamo la serie geometrica

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=1}^{\infty} z^n$$

Quindi se poniamo $w = -z^2$ otteniamo

$$\frac{1}{z^2-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-z^2)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n z^{2n}$$

convergente per $|z|^2 < 1$, cioe' nel cerchio $|z| < 1$.

Esercizio 10

Calcolare lo sviluppo di Taylor intorno al punto $z = 0$ della funzione

$$\frac{1}{z^2+z-2}$$

Scomponiamo in due frazioni:

$$\frac{1}{z^2+z-2} = \frac{1}{z+2}\frac{1}{z-1} = \frac{A}{z+2} + \frac{B}{z-1}$$

ricavando i coefficienti A e B

$$\begin{aligned}
&(A+B)z-(A+2B)=1\\
&A+B=0\\
&A-2B=1\\
&A=-1/3, B=1/3
\end{aligned}$$

si ottiene la scomposizione

$$\frac{1}{z^2+z-2}=\frac{1}{3}\left[-\frac{1}{z+2}+\frac{1}{z-1}\right]=\frac{1}{3}\left[-\frac{1}{2}\frac{1}{1-(-\frac{z}{2})}-\frac{1}{1-z}\right]=$$
$$\frac{1}{3}\left[-\frac{1}{2}\sum_1^\infty(-\frac{z}{2})^n-\sum_1^\infty z^n\right]=\frac{1}{3}\sum_1^\infty\left(\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}-1\right)z^n.$$

Il raggio di convergenza si ottiene subito, notando che la singolarita' piu' vicina al punto dove si sviluppa la serie e' in $z=1$.

Esercizio 11

Calcolare mediante il metodo dei residui l'integrale

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{1}{3+\sin\theta}d\theta$$

Integriamo sulla circonferenza $\Gamma: z=e^{i\theta}$ centrata nell'origine e di raggio unitario.

$$dz=-ie^{i\theta}d\theta$$

$$\int d\theta\to\int -ie^{i\theta}dz=\int -i\frac{dz}{z}$$

Ricordando

$$\sin\alpha=\frac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2i}$$

$$\sin\theta=\frac{z-\frac{1}{z}}{2i}=\frac{z^2-1}{2iz}$$

Con le opportune sostituzioni riscriviamo l'integrale:

$$I=\int_\Gamma(-i)\frac{dz}{z}\frac{1}{3+\frac{z^2-1}{2iz}}=-i\int_\Gamma\frac{2idz}{z^2+6iz-1}=\int_\Gamma\frac{2}{z^2+6iz-1}dz$$

A questo punto bisogna trovare i poli della funzione integranda.

$$z^2+6iz-1=0\to z=-3i\pm\sqrt{-9+1}$$

$$z_{1,2}=(-3\pm2\sqrt{2})i$$

Attenzione, perche' solo $|z_1| = |(-3+2\sqrt{2})i$ e' all'interno del cammino di integrazione. Quindi va calcolato solo il residuo relativo a z_1.

$$I = 2\pi i Res[f(z), z_1]$$

Ricordando la definizione

$$Res[f(z), z_0] = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z)$$

si ottiene

$$Res[f(z), z_1] = \lim_{z \to z_1} (z - z_1) \frac{2}{(z - z_1)(z - z_2)} = \lim_{z \to z_1} \frac{2}{(} z - z_2) = \frac{2}{z_1 - z_2}$$

$$I = 2\pi i \frac{2}{i(-3 - 2\sqrt{2} + 3 - 2\sqrt{2})} = \frac{\pi}{2}$$